Nueva fórmula del coeficiente de escala UTM

New formula for the utm scale coefficient

José Ignacio Rivas Negreira

REVISTA **MAPPING**
Vol.32, 212, 4-9
2023
ISSN: 1131-9100

Resumen

El objetivo de la investigación es determinar una nueva fórmula para el cálculo del coeficiente de anamorfosis de las coordenadas UTM respecto a las distancias reales medidas en campo.

No existen desarrollos sencillos y demostrables para dicho cálculo ya que todos se basan en desarrollos sucesivos de aproximaciones.

Abstract

The aim of the research is to determine a new formula for the calculation of the anamorphosis coefficient of the UTM coordinates with respect to the real distances measured in the field.

There are no simple and demonstrable developments for such a calculation as they are all based on successive developments of approximations.

Palabras clave: Escala, Fórmula, Anamorfosis, Mercator

Keyword: UTM, Scale, Formula, Anamorphosis, Mercator

José Ignacio Rivas Negreira.
Ingeniero Técnico en Topografía UPM
jirivasnegreira@gmail.com

Recepción 07/06/2023
Aprobación 10/07/2023

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad todos los trabajos de topografía y la obtención de coordenadas se apoyan en redes topográficas y coordenadas UTM, los trabajos realizados con GPS y fotogramétricos se apoyan en coordenadas UTM. Aunque se ha desarrollado el sistema de coordenadas UTM con el fin de que la diferencia de distancias entre las coordenadas UTM y las distancias reales en campo puedan alcanzar casi el 1:1.000 en casos extraordinarios, esto hace que para las construcciones civiles estos errores sean inadmisibles. Por ello todos los trabajos de topografía en los que son necesarias las distancias reales han de ser corregidos por el factor de escala UTM.

Actualmente el cálculo se resuelve con el *software* de topografía, y los desarrollos que dan su resultado tienen un alto grado de complejidad e iteraciones y solo son utilizados en el diseño de los programas topográficos donde su base es desconocida incluso por los profesionales. Además, tenemos una serie de fórmulas resumidas, cuyos errores en la mayoría de los casos salen de tolerancia.

Objetivos Generales

La razón por la cual se decide indagar sobre este tema es que no existen demostraciones sencillas del coeficiente de anamorfosis de UTM. El presente artículo para que todos los profesionales tengan una fórmula sencilla de fácil aplicación independientemente del elipsoide que se utilice y del lugar del mundo en que se quiere determinar dicho coeficiente.

Objetivos Específicos

Fórmula sencilla para el cálculo de K en un determinado punto.

- Desarrollar una fórmula simple para calcular el coeficiente K en un punto específico.
- Presentar una demostración clara y sencilla que cualquier estudiante de topografía con conocimientos de trigonometría pueda comprender, añadiendo un valor educativo significativo.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Definición

El sistema de coordenadas Universal Transversal de Mercator (UTM) se basa en la proyección cartográfica transversal de Mercator, una adaptación de la proyección de Mercator que se hace tangente a un meridiano en lugar de al ecuador y se ajusta mediante un factor de escala de 0.9996 para reducir errores. La principal ventaja del sistema UTM es que las coordenadas se expresan en metros, lo que actualmente facilita el manejo de deformaciones en las distancias, las cuales son generalmente inferiores a 1:1000. Sin embargo, cuando se requieren medidas exactas, es necesario calcular el factor de escala para cada punto con el fin de corregir estos errores. Hasta la fecha, las fórmulas disponibles eran o bien demasiado complicadas para demostrar o simplificaciones empíricas. El objetivo es proporcionar una fórmula con una demostración sencilla, pero con un alto grado de precisión.

2.2 Distintas fórmulas para el cálculo del coeficiente de escala UTM.

Seguidamente se exponen las fórmulas para el cálculo del coeficiente de anamorfosis más comunes que se utilizan normalmente.

Ecuación simplificada

$$K = Ko * \left[1 + \frac{(\Delta\lambda)^2 * (cos\varphi)^2}{2}\right]$$

La ecuación simplificada aproximada

$$K = Ko * \left[1 + \frac{x}{2(R_m)^2}\right]$$

La ecuación simplificada aproximada

$$\underline{q = (X - 500.000)}$$
$$K = Ko(1 + 0.12325 * q^2)$$

La ecuación completa

$$(XVIII) = \frac{(1 + e'^2 cos\varphi)}{2v^2} * \left(\frac{1}{Ko^2}\right) * 10^{12}$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{(1 - e^2)}$$

$$K = Ko[1 + (XVIII)q^2 + 0.00003q^4]$$

3. CÁLCULO DEL COEFCIENTE DE ESCALA UTM

3.1 Variables para el cálculo del coeficiente de escala

Para calcular la proyección del elipsoide en el cilindro elíptico.

La deformación en el meridiano central tangente al cilindro es 0 de ahí va aumentando hacia el exterior.

Definimos las siguientes variables:

R= Radio de curvatura en un punto dado de la misma latitud, coincide tanto el del elipsoide como la tierra

AX=Coordenada X-500.000,00 m de tal modo que trasladamos el 0 al meridiano central del huso

AXf=proyección del arco del punto dado + 1 m desde el elipsoide desde el cilindro tangente

AXa=Arco en el elipsoide (Tierra) dese el meridiano Central hasta el punto dado.

ϒ= El ángulo en el elipsoide desde el meridiano central al punto dado con el Radio correspondiente a ese punto. R

ϒ1= ángulo del arco de 1m en ese punto

DX=Diferencia de distancian es el elipsoide entre los puntos AX_f-AX

Ko=Coeficiente de reducción de 0.9996 que se reduce el cilindro elíptico tangente que hará que se introduzca en el elipsoide.

Adicionalmente tenemos las siguientes variables

a= Semieje mayor del elipsoide

α= Aplanamiento

X= Coordenada X del punto dado en UTM

Y= Coordenada Y del punto dado en UTM

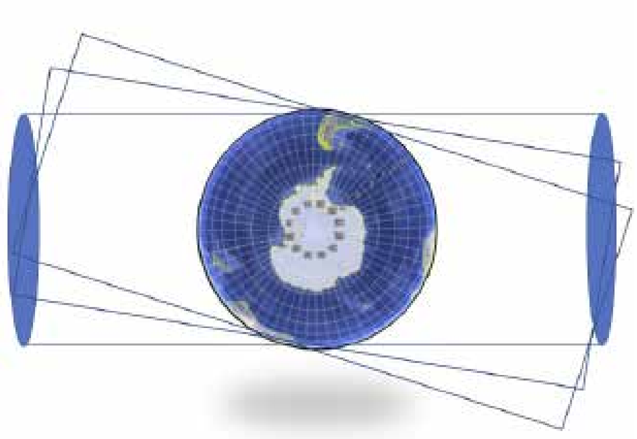


Figura 1. Imagen obtenida del Google earth.

3.2 Cálculo del radio de curvatura de la esfera tangente al elipsoide en un punto dado

Partimos de la definición del elipsoide

El elipsoide se define por su semieje mayor y su excentricidad

Semieje menor:

$$b=a*(1-\alpha)$$

Primera excentricidad

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

Segunda excentricidad

$$e'=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

Para calcular el radio de la esfera en el punto local Usando la coordenada Y.

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\varphi)^{3/2}}$$

$$N=\frac{a}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\varphi)^{1/2}}$$

Al final el radio de la esfera en el punto se calcula:

$$R=\sqrt{\rho*N}$$

Para el hemisferio Norte

$$\varphi\ (\mathrm{rad})=Y*\frac{\pi/2}{10.000.000}$$

Para el hemisferio Sur

$$\varphi\ (\mathrm{rad})=(10.000.000-Y)*\frac{\pi/2}{10.000.000}$$

Agrupando los términos anteriores podríamos calcular directamente e

$$e=\frac{\sqrt{a^2+(a*(1-\alpha))^2}}{a}$$

Por tanto, la ecuación del radio de curvatura de la tierra en un punto dado será:

$$R=\sqrt{\left(\frac{a(1-e^2)}{\left(1-e^2\mathrm{sen}^2\left(Y*\frac{\pi/2}{10.000.000}\right)\right)^{3/2}}\right)\left(\frac{a}{\left(1-e^2\mathrm{sen}^2\left(Y*\frac{\pi/2}{10.000.000}\right)\right)^{1/2}}\right)}$$

3.3 El cálculo final de coeficiente K escala UTM

AX=|X-500.000|

$$\mathrm{AXa} = \mathrm{R} * arcotg\left(\frac{\mathrm{X} - 500.000}{\mathrm{R}}\right)$$

El ángulo desde el meridiano central del huso al punto dado

$$\Upsilon = \frac{\mathrm{AXa}}{\mathrm{R}}$$

El ángulo correspondiente a 1 m

$$\Upsilon 1 = \frac{1}{\mathrm{R}}$$

De tal modo la proyección del arco sobre el cilindro incluido el arco de 1 m

$$\mathrm{AX}_f = \mathrm{R} * \mathrm{tg}(\Upsilon + \Upsilon 1)$$
$$\mathrm{AX} = \mathrm{R} * \mathrm{tg}(\gamma)$$

En consecuencia, la proyección del arco de 1metro en el cilindro elíptico será la diferencia de las 2 proyecciones

$$\mathrm{DX} = \mathrm{AX_f} - \mathrm{AX}$$

Agrupando los términos

$$\mathrm{DX} = \mathrm{R} * (\mathrm{tg}(\Upsilon + \Upsilon 1) - \mathrm{tg}(\Upsilon))$$

Ya tenemos la proyección del arco de 1 m a una distancia dada, podemos trabajar con la unidad de m ya que no nos cambiará el coeficiente, y como lo comparamos con 1 este será directamente el coeficiente K respecto a las X.

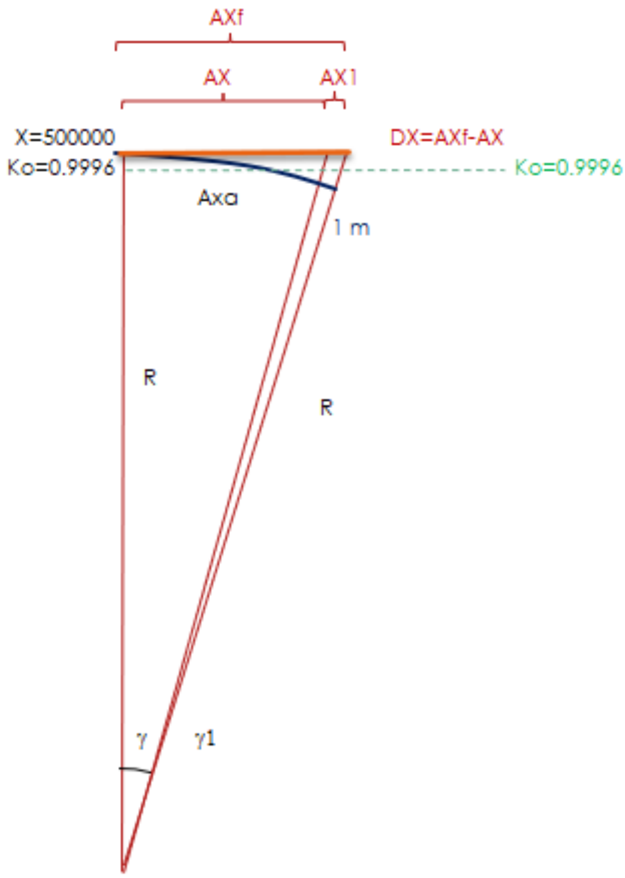
Respecto a las Y el coeficiente es igual a 1 ya que no hay deformación en el sentido de las Y

Reducimos el cilindro elíptico por el factor 0.9996 de tal modo que queda parte dentro del elipsoide de esta forma el coeficiente K es negativo en la parte interna y positivo en la parte externa.

$$\mathrm{K} = 0.9996 * \left(\frac{\mathrm{DX} + 1}{2}\right)$$

Si hacemos el desarrollo completo sin sustituir ningún valor donde R lo calculamos previamente, con los datos del elipsoide que utilizamos y

$$K_0 = 0.9996$$



$$\mathrm{K(JIRN)} = \mathrm{K}_0\left\{\frac{\mathrm{R}\left\{\mathrm{tg}\left[arcotg\left(\frac{|500.000 - \mathrm{X}|}{\mathrm{R}}\right) + \frac{1}{\mathrm{R}}\right] - \mathrm{tg}\left[arcotg\left(\frac{|500.000 - \mathrm{X}|}{\mathrm{R}}\right)\right]\right\} + 1}{2}\right\}$$

$$\mathrm{K(JIRN)} = \mathrm{K}_0\left\{\frac{\mathrm{R}\left\{\mathrm{tg}\left[arcotg\left(\frac{|500.000 - \mathrm{X}|}{\mathrm{R}}\right) + \frac{1}{\mathrm{R}}\right] - \left(\frac{|500.000 - \mathrm{X}|}{\mathrm{R}}\right)\right\} + 1}{2}\right\}$$

3.4 Comprobación del resultado de la fórmula propuesta con la calculadora geodésica del Instituto Geográfico Nacional de España para el sistema UTM UD50

Comprobamos la fórmula en los puntos extremos del huso desde el Ecuador 0° de latitud hasta los 81° N, donde la fórmula tendrá las máximas desviaciones

K (CALCULADORA) = 0.99972256
K (JIRN) = 0.99972207
Diferencia = 0.00000049

K (CALCULADORA) = 0.99994314
K (JIRN) = 0.99994272
Diferencia = 0.00000042

K (CALCULADORA) = 1.00040728
K (JIRN) = 1.00040679
Diferencia = 0.00000049

K (CALCULADORA) = 1.00081717
K (JIRN) = 1.00081708
Diferencia = 0.00000009

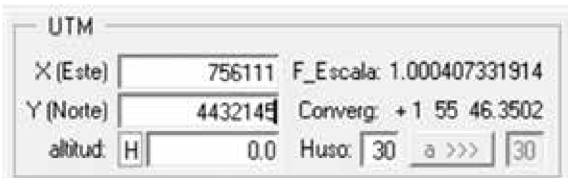
K (CALCULADORA) = 1.00097950
K (JIRN) = 1.00097967
Diferencia = -0.00000017

3.5 Comprobación del resultado de la fórmula propuesta con la calculadora geodésica de https://enmaderal.jimdofree.com/ para el sistema de UTM WGS84

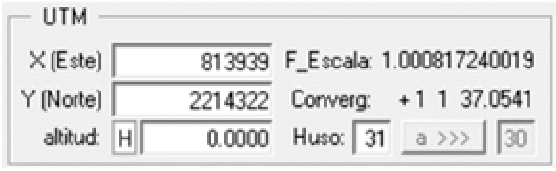
Comprobamos la fórmula en los puntos extremos del huso desde el Ecuador 0° de latitud hasta los 81° N, donde la fórmula tendrá las máximas desviaciones

K (CALCULADORA) = 0.99972256
K (JIRN) = 0.99972208
Diferencia = 0.00000048

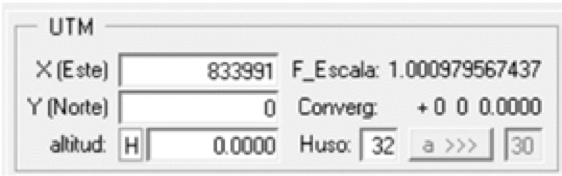
K (CALCULADORA) = 0.99994320
K (JIRN) = 0.99994275
Diferencia = 0.00000045



K (CALCULADORA) = 1.00040730
K (JIRN) = 1.00040684
Diferencia = 0.00000046



K (CALCULADORA) = 1.00081724
K (JIRN) = 1.00081703
Diferencia = 0.00000016



K (CALCULADORA) = 1.00097960
K (JIRN) = 1.00097967
Diferencia = - 0.00000007

4. CONCLUSIONES

La fórmula obtenida es una fórmula sencilla fácilmente demostrable sin tener que realizar iteraciones ni demostraciones complicadas que permite obtener el coeficiente de escala UTM, en un punto dado de una forma muy sencilla. La demostración tiene un alto valor didáctico, porque se puede demostrar y conseguir una fórmula entendible para todos los estudiantes sin necesidad de grandes conocimientos matemáticos.

La ventaja de este sistema es que podemos utilizar cualquier elipsoide y solo necesitamos cambiar los parámetros del cálculo del radio.

Se podría hacer una fórmula simplificada para establecer el radio del elipsoide dependiendo de la Zona UTM.

La discrepancia en el coeficiente de anamorfosis entre distintas calculadoras geodésicas y la fórmula propuesta no excede 0.0000005 en ningún punto del planeta. Esto significa que el error en mediciones de 1.000 metros no superará los 0.5 milímetros, incluso en los extremos más distantes. Por lo tanto, esta fórmula es perfectamente adecuada para cualquier tipo de trabajo topográfico. En el caso de distancias mayores, es necesario calcular los coeficientes para los puntos visados e intermedios, asegurando así que el error se mantenga a un nivel submilimétrico, prácticamente inexistente, incluso en mediciones de largo alcance.

AGRADECIMIENTOS

A Miguel Angel López Gaitano, por su revisión, crítica y consejo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Deformación de Distancias Horizontales en la Proyección UTM, obtenido de: https://mundogeo.com/2000/01/01/deformacion-de-distancias-horizontales-en-la-proyeccion-utm/

Fernández Coppel, I.A., (2001) La proyección UTM (Universal Transversa Mercator), Universidad de Valladolid.

Javier Sánchez Espeso; Raúl Pereda García; 1. Geodesia y Proyección UTM, Universidad de Cantabria, https://ocw.unican.es/pluginfile.php/713/course/section/736/b2_tema1_geodesia_y_proyeccion_UTM.pdf

Miguel Torres Mondejar, Director/s: Sergio González López, M. Amparo Rubio Cerdá, 2015. Desarrollo de aplicaciones de cálculo para topografía en proyección UTM, Obtenido de https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/77269/memoria.pdf

Sistema de Coordenadas Geográficas: UTM obtenido de https://www.aristasur.com/contenido/sistema-de-coordenadas-geograficas-utm

Sistema de Coordenadas Universal Transversal de Mercator. Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_coordenadas_universal_transversal_de_Mercator

https://www.ign.es/web/ign/portal/calculadora-geodesica

https://enmaderal.jimdofree.com/descargas/calculadora-utm/

Sobre el autor

José Ignacio Rivas Negreira
Profesional con amplia experiencia en el Desarrollo de Negocio en España y América de Sur (Uruguay, Ecuador, Bolivia, Paraguay, Perú, Brasil) durante los últimos 20 años. Gran conocimiento de obras civiles e Infraestructuras con aporte de soluciones constructivas y de diseño. Miembro del comité de gerencia de varios consorcios de obras de infraestructuras. Miembro de la Mesa de Organización de la Feria EXPO ECOMIN. Socio de MENSA PERÚ. Profesor de Topografía y Geodesia en Ingeniería Ambiental y Arquitectura en la Universidad Privada del Norte.