

Representación del tesseracto mediante proyección tridimensional y validación con un sistema bidiédrico XYZ-XYT

REVISTA **MAPPING**

Vol. 35, 224, 04-15

2026

ISSN: 1131-9100

Representation of the tesseract through three-dimensional projection and validation using an XYZ-XYT bidihedral system

José Ignacio Rivas Negreira

Resumen

La geometría en cuatro dimensiones está definida con todo rigor desde el punto de vista analítico, pero sigue faltando una herramienta gráfica equivalente al sistema diédrico: un sistema que permita operar sobre objetos 4D con reglas, paso a paso y con comprobaciones, igual que se hace en 3D.

Este trabajo propone el sistema bidiédrico, una extensión directa del diédrico clásico. Consiste en representar dos espacios tridimensionales que comparten los ejes X e Y: el espacio físico (X, Y, Z) y un espacio auxiliar (X, Y, T). Cada uno se dibuja con su propio diedro (planta y alzado) y los dos diedros se colocan uno encima del otro, con la misma escala y el mismo origen en X. Así, un punto 4D queda definido por cuatro proyecciones enlazadas por líneas de referencia verticales, igual que la planta y el alzado de un punto en el diédrico.

Sobre esta base se define la proyección central $4D \rightarrow 3D$ desde un foco y se demuestra que, para las celdas del tesseracto, equivale a una homotecia. Como validación se resuelve un ejemplo completo, gráfica y numéricamente: la conocida imagen del tesseracto (un cubo dentro de otro) aparece como resultado de una construcción definida y comprobable, no como un dibujo interpretativo. El método abre la puerta a resolver otros problemas cuatridimensionales (incidencias, intersecciones, secciones, paralelismos y relaciones métricas) con el espíritu operativo de la geometría descriptiva.

Abstract

Four-dimensional geometry is rigorously defined from an analytical standpoint, yet a practical graphical tool equivalent to the dihedral system is still lacking: a system that allows operations on 4D objects to be carried out using rules, step by step, and with verifiable results, just as in 3D geometry.

This paper proposes the bi-dihedral system, a direct extension of classical dihedral projection. It consists of representing two three-dimensional spaces that share the X and Y axes: the physical space (X, Y, Z) and an auxiliary space (X, Y, T). Each space is represented by its own dihedral system (plan and elevation), and the two systems are arranged one above the other, using the same scale and sharing the same origin along the X-axis. Thus, a 4D point is defined by four linked projections connected by vertical reference lines, in the same way that the plan and elevation of a point are related in the classical dihedral system.

On this basis, a central projection from 4D to 3D is defined using a projection centre, and it is demonstrated that, for the cells of a tesseract, this projection is equivalent to a homothety. As a validation, a complete example is solved both graphically and numerically: the familiar image of a tesseract—a cube within another cube—emerges as the result of a well-defined, verifiable construction rather than an interpretative drawing.

The method opens the way to solving other four-dimensional geometric problems, including incidence, intersection, section, parallelism, and metric relationships, while preserving the operational approach of descriptive geometry.

Palabras clave: Tesseracto; Cuarta dimensión; Proyección; Geometría descriptiva; Sistema bidiédrico; Doble diédrico.

Keywords: Tesseract; Fourth dimension; Projection; Descriptive geometry; Bidihedral system; Double dihedral system.

Universidad Privada del Norte. Perú
jirivasnegreira@gmail.com

Recepción 09/07/2026
Aprobación 20/07/2026

1. INTRODUCCIÓN

La geometría descriptiva no es sólo un recurso para visualizar: es un lenguaje para resolver. En tres dimensiones, el sistema diédrico convierte un problema espacial en una serie de operaciones sobre dos proyecciones coordinadas, la planta y el alzado, en las que cada paso tiene significado geométrico y puede comprobarse.

En cuatro dimensiones la situación es desigual. Las matemáticas definen sin ambigüedad puntos, rectas, planos e hiperplanos, pero en la práctica gráfica sólo quedan dos caminos poco satisfactorios: resolverlo todo algebraicamente o recurrir a dibujos intuitivos (las conocidas «sombras» del tesseracto) que rara vez dicen qué transformación se ha aplicado, qué propiedades se conservan ni cómo comprobar el resultado.

El problema, por tanto, no es que la cuarta dimensión «no se pueda dibujar», sino que falta un **sistema de representación** que funcione como el diédrico: que codifique el objeto sin ambigüedad, que permita operar con reglas y que sea coherente por dentro.

La idea de partida es sencilla. En el diédrico, la tercera coordenada (**Z**) se incorpora al papel mediante una segunda vista, el alzado, ligada a la planta por líneas de referencia. Si la cuarta coordenada (**T**) se incorpora con esa misma disciplina, el paso de 3D a 4D no exige ninguna ruptura conceptual. Eso es el sistema bi-diédrico: dos diedros, uno para (**X, Y, Z**) y otro para (**X, Y, T**), dibujados uno encima del otro y sincronizados por el eje **X**.

Con este sistema, el paso de 4D a 3D se formaliza como lo que realmente es: una proyección desde un foco hacia un hiperplano de llegada. La imagen 3D resultante no es «un dibujo bonito», sino el resultado de una operación geométrica reproducible y verificable.

El tesseracto es el caso de prueba natural. No es el único objeto interesante, pero obliga a responder las preguntas esenciales: qué es una arista paralela a **T**, cómo se conservan las incidencias al proyectar, por qué aparece un «cubo interior» y de qué depende su tamaño.

El artículo se organiza así: el apartado 2 resume los fundamentos; el 3 presenta el sistema bi-diédrico; el 4 define el tesseracto; el 5 deduce las fórmulas de la proyección; el 6 describe la construcción gráfica paso a paso, y el 7 resuelve un ejemplo completo y comprueba el resultado.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Qué hay que conservar del sistema diédrico

El plano no puede contener directamente el espacio tridimensional, pero sí dos proyecciones coordinadas

que, juntas, lo determinan. En el diédrico, el espacio se proyecta sobre dos planos perpendiculares, el horizontal y el vertical. Al abatir el plano horizontal sobre el vertical, ambas proyecciones quedan en la lámina, separadas por la **línea de tierra (LT)** y ligadas por **líneas de referencia** perpendiculares a ella: un mismo punto aparece en planta y en alzado sobre la misma perpendicular a la LT.

De esta estructura interesan tres ideas que pueden llevarse a 4D:

- **Descomposición de la información.** Una sola vista no basta; varias vistas coordinadas, sí.
- **Referencias compartidas.** Los ejes comunes permiten reconstruir el objeto y comprobar la construcción.
- **Operaciones regladas.** Abatir, girar, cambiar de plano o hallar intersecciones son procedimientos definidos, no dibujos libres.

Extender el diédrico a 4D no consiste, por tanto, en inventar símbolos para la cuarta dimensión, sino en incorporar la coordenada **T** con la misma disciplina con la que el diédrico incorpora la coordenada **Z**.

2.2. El espacio de cuatro dimensiones

Un punto del espacio euclídeo de cuatro dimensiones se describe con cuatro coordenadas:

$$Q = (x, y, z, t)$$

donde **t** es independiente de las otras tres: no puede expresarse como combinación de **X, y y Z**.

En 3D, un plano es un subespacio de dimensión 2 dentro de un espacio de dimensión 3. En 4D aparece un elemento nuevo, el **hiperplano**: un subespacio de dimensión 3. Su ecuación general es

$$aX + bY + cZ + dT = e$$

y los más útiles para nuestro propósito son los hiperplanos de nivel **T = constante**. Cada uno de ellos es un espacio tridimensional completo. Por eso el espacio 4D puede imaginarse como una familia continua de espacios 3D «apilados» según **T**, del mismo modo que el espacio 3D es una pila de planos horizontales **Z = constante**.

2.3. De 4D a 3D: sección y proyección

Para obtener una figura tridimensional a partir de un objeto 4D hay dos caminos, y los dos deben estar definidos con precisión:

- **Sección.** Se corta el objeto con un hiperplano, por ejemplo $T = c$. El resultado es una figura 3D real; al variar c se observa cómo «evoluciona» el objeto a lo largo de la cuarta coordenada.
- **Proyección.** Se elige un hiperplano de llegada y una ley de proyección. En la **proyección central** se fija un foco Φ en 4D; para cada punto Q del objeto se traza la recta ΦQ , y su imagen Q' es el punto donde esa recta corta al hiperplano de llegada.

La proyección central es la que explica la imagen clásica del tesseracto: el factor de escala depende de la coordenada T de cada punto, de modo que las partes situadas en distintos «niveles» de T se ven con tamaños distintos (apartado 5). La diferencia entre una «sombra» rigurosa y un dibujo intuitivo es sencilla: en la primera la transformación está definida y se puede comprobar.

3. EL SISTEMA BI-DIÉDRICO

3.1. Idea: dos espacios 3D que comparten X e Y

El sistema trabaja con dos espacios tridimensionales coordinados:

- **E1, espacio físico (X, Y, Z):** es donde aparecerá la imagen final.
- **E2, espacio auxiliar (X, Y, T):** es igual que el anterior, pero con T en lugar de Z . Sirve para controlar la cuarta coordenada.

Los dos comparten el plano XY con el mismo origen, la misma orientación y la misma escala. Los ejes X e Y actúan como una «bisagra»: lo que se dibuja en un espacio tiene que ser compatible con lo que se dibuja en el otro.

3.2. Los dos diedros y su disposición en la lámina

Cada espacio se representa con un diedro clásico, con su plano horizontal, su plano vertical y su línea de tierra (Figura 1):

Diedro	Espacio	Plano horizontal	Plano vertical	Línea de tierra
Diedro 1	(X, Y, Z)	XY (planta)	XZ (alzado Z)	$LT_1 = \text{eje } X$
Diedro 2	(X, Y, T)	XY (planta)	XT (alzado T)	$LT_2 = \text{eje } X$

Regla de disposición. En la lámina, el Diedro 2 (X, Y, T) se dibuja **encima** del Diedro 1 (X, Y, Z), con las dos líneas de tierra paralelas, el mismo origen O y la misma escala en X .

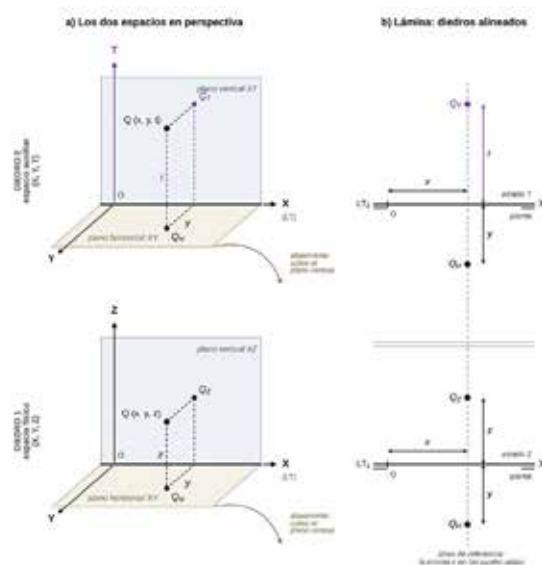


Figura 1. Sistema bi-diédrico. a) Los dos espacios en perspectiva: un punto Q tiene planta QH y alzado QT en el espacio (X, Y, T) , y planta QH y alzado QZ en el espacio (X, Y, Z) . b) Lámina: tras abatir el plano horizontal sobre el vertical, el Diedro 2 queda encima del Diedro 1 y una misma línea de referencia vertical recorre las cuatro proyecciones.

Así, cualquier abscisa X ocupa la misma vertical en las cuatro vistas Y se transporta de una vista a otra con una simple línea de referencia vertical. Esta alineación es lo que hace operativo el sistema: si los diedros no estuvieran alineados, habría que trasladar las medidas a compás Y se perdería la comprobación visual.

3.3. Representación de un punto 4D

Un punto $Q = (x, y, z, t)$ queda representado por cuatro proyecciones planas:

Proyección	Vista	Coordenadas que muestra
Q_H	planta (igual en los dos diedros)	(x, y)
Q_Z	alzado del Diedro 1	(x, z)
Q_T	alzado del Diedro 2	(x, t)

Para que el punto esté bien definido deben cumplirse dos **condiciones de coherencia**, equivalentes a la correspondencia entre planta y alzado en el diédrico:

- Las cuatro proyecciones están sobre la **misma línea de referencia vertical** (misma X).
- Las **dos plantas coinciden** (misma Y).

Si alguna no se cumple, la construcción contiene un error. La diferencia entre la altura física Z y el «nivel» t sólo aparece en los alzados: Z se mide desde LT_1 y t desde LT_2 .

Notación. Las proyecciones se indican con subíndices: Q_H (planta), Q_Z (alzado Z) y Q_T (alzado T). La imagen proyectada de un punto se indica con prima: Q' . Para no confundirlo con el vértice F del tesseracto, el **foco de proyección** se designa con la letra griega Φ .

3.4. Figuras situadas en un nivel T constante

Muchas figuras del tesseracto, en particular sus celdas cúbicas, están contenidas en un hiperplano $T = T_0$. Para ellas:

- En el **alzado T** todos sus puntos quedan sobre una misma horizontal, a la altura T_0 : la figura se ve «de canto».
- Sus distancias, ángulos y paralelismos no dependen de T , así que se leen directamente en el **Diedro 1**, como en cualquier figura 3D.

Dicho de otro modo: el Diedro 2 indica en qué «capa» 4D se encuentra cada figura; una vez fijada la capa, su forma real se estudia en el Diedro 1.

4. EL TESERACTO (HIPERCUBO 4D)

4.1. Definición

El tesseracto o hipercubo es a la cuarta dimensión lo que el cuadrado es a la segunda y el cubo a la tercera. Puede construirse por desplazamientos sucesivos (Figura

2): un punto desplazado según X genera un segmento; el segmento desplazado según Y , un cuadrado; el cuadrado desplazado según Z , un cubo; y el cubo desplazado según T , el tesseracto. En cada paso la figura nueva está formada por **dos copias de la anterior unidas por aristas en la dirección nueva**.

Con coordenadas, el tesseracto unidad es el conjunto de puntos que cumplen

$$0 \leq x, y, z, t \leq 1$$

Vértices: todas las combinaciones de 0 y 1 en las cuatro coordenadas, es decir, $2^4 = 16$.

- **Aristas:** unen dos vértices que difieren en una sola coordenada. Hay 32, y en cada vértice concurren 4 (una por cada dirección X, Y, Z y T), perpendiculares entre sí.
- **Caras:** 24 cuadrados.
- **Celdas:** 8 cubos. Cada celda se obtiene fijando una coordenada (en 0 o en 1) y dejando libres las otras tres.

Elemento	Cuadrado (2D)	Cubo (3D)	Tesseracto (4D)
Vértices	4	8	16
Aristas	4	12	32
Caras cuadradas	1	6	24
Celdas cúbicas	—	1	8

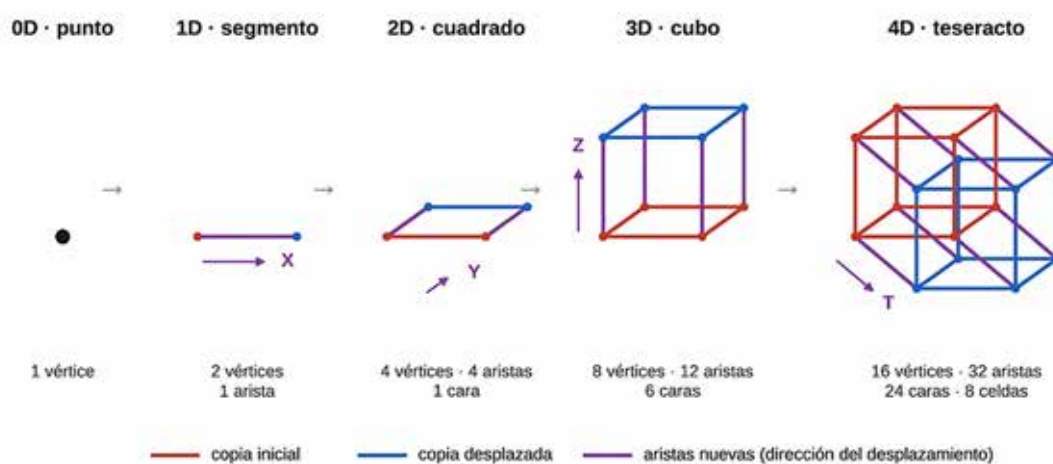


Figura 2. Del punto al tesseracto. Cada figura está formada por dos copias de la anterior (rojo y azul) unidas por aristas en una dirección nueva (morado). El tesseracto son dos cubos unidos por 8 aristas en dirección T .

Igual que la superficie de un cubo está formada por 6 cuadrados, la «superficie» del tesseracto está formada por 8 cubos.

El tesseracto es un politopo **regular**: todas sus aristas, caras y celdas son iguales.

4.2. Interpretación útil para el sistema bi-diédrico

La forma más práctica de entender el tesseracto es como **dos cubos iguales situados en dos niveles de la cuarta dimensión** (por ejemplo, uno en $T = T_1$ y otro en $T = T_2$) cuyos vértices correspondientes están unidos por aristas paralelas al eje T . Esta lectura encaja directamente con el sistema:

La **forma de cada cubo** (cada nivel $T = \text{cte.}$) se estudia en el Diedro 1 (X, Y, Z).

La **conexión entre niveles**, es decir, las aristas paralelas a T , se ve en el Diedro 2 (X, Y, T).

5. LA PROYECCIÓN CENTRAL 4D

→ 3D

El tesseracto no puede verse directamente en 3D: lo que podemos ver es su **proyección** sobre un espacio tridimensional, que identificamos con un hiperplano de llegada $T = T_1$. En este apartado se deducen paso a paso las fórmulas de esa proyección.

5.1. Recta proyectante

Sean $Q = (x, y, z, t)$ un punto del objeto y $\Phi = (X_\Phi, Y_\Phi, Z_\Phi, T_\Phi)$ el foco, ambos en el espacio 4D. La recta que los une se describe con un parámetro λ :

$$r(\lambda) = \Phi + \lambda (Q - \Phi)$$

es decir, componente a componente:

$$X(\lambda) = X_\Phi + \lambda(x - X_\Phi)$$

$$Y(\lambda) = Y_\Phi + \lambda(y - Y_\Phi)$$

$$Z(\lambda) = Z_\Phi + \lambda(z - Z_\Phi)$$

$$T(\lambda) = T_\Phi + \lambda(t - T_\Phi)$$

Para $\lambda = 0$ estamos en el foco; para $\lambda = 1$, en el punto Q ; los demás valores recorren toda la recta.

5.2. Corte con el hiperplano de llegada

La imagen Q' es el punto de la recta que está en el hiperplano $T = T_1$. Basta imponer esa condición a la cuarta coordenada:

$$T_\Phi + \lambda(t - T_\Phi) = T_1$$

$$\lambda = \frac{T_1 - T_\Phi}{t - T_\Phi}$$

Este valor de λ es el mismo para las cuatro coordenadas, porque describe un único punto de la recta.

5.3. Fórmulas generales

Sustituyendo λ en las tres primeras componentes se obtienen las coordenadas del punto proyectado $Q' = (X', Y', Z', T_1)$:

$$X' = X_\Phi + \frac{T_1 - T_\Phi}{t - T_\Phi} (x - X_\Phi)$$

$$Y' = Y_\Phi + \frac{T_1 - T_\Phi}{t - T_\Phi} (y - Y_\Phi)$$

$$Z' = Z_\Phi + \frac{T_1 - T_\Phi}{t - T_\Phi} (z - Z_\Phi)$$

Como la cuarta coordenada de Q' vale siempre T_1 , el punto proyectado se interpreta directamente como un punto del espacio físico (X, Y, Z).

5.4. Celdas con T constante: la proyección es una homotecia

En el tesseracto, cada celda que se proyecta tiene todos sus puntos en el mismo nivel $t = T_2$. Entonces el factor

$$\lambda = \frac{T_1 - T_\Phi}{T_2 - T_\Phi}$$

es **el mismo para todos sus puntos** (no depende de X, Y ni Z) y las fórmulas se reducen a:

$$X' = X_\Phi + \lambda(x - X_\Phi)$$

$$Y' = Y_\Phi + \lambda(y - Y_\Phi)$$

$$Z' = Z_\Phi + \lambda(z - Z_\Phi)$$

Es decir: **la proyección de una celda es una homotecia de centro** (X_Φ, Y_Φ, Z_Φ) **y razón** λ . Por eso una celda cúbica se proyecta como otro cubo, semejante al original, más grande o más pequeño según el valor de λ (Figura 3):

Si el foco está **más allá** de la celda ($T_\Phi > T_2 > T_1$), $\lambda > 1$: la celda se ve **ampliada**.

Si el foco está **al otro lado** del hiperplano de llegada ($T_\Phi < T_1 < T_2$), $0 < \lambda < 1$: la celda se ve **reducida**. Este es el origen del «cubo interior» de muchas representaciones del tesseracto.

Una celda contenida en el propio hiperplano de llegada ($T_2 = T_1$) tiene $\lambda = 1$: **no se mueve**.

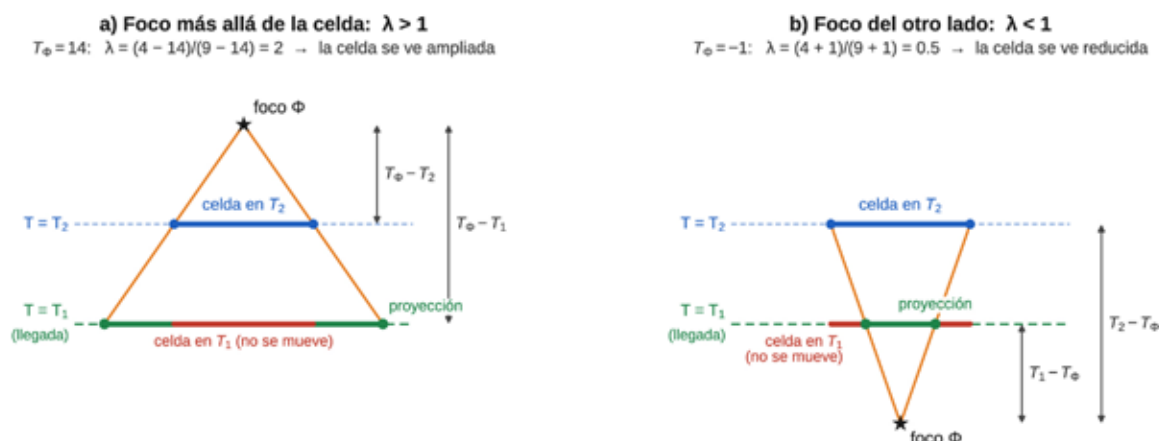


Figura 3. Principio de la proyección central, visto en el alzado T. Los rayos que salen del foco Φ y pasan por la celda situada en T_2 cortan al hiperplano de llegada T_1 ; el cociente de las distancias al foco es la razón de homotecia λ . a) Foco más allá de la celda: ampliación. b) Foco al otro lado: reducción.

6. CONSTRUCCIÓN GRÁFICA EN EL SISTEMA BI-DIÉDRICO

Las fórmulas del apartado anterior tienen una traducción gráfica directa en la lámina. Para proyectar un vértice Q , situado en $T = T_2$, sobre el hiperplano $T = T_1$ se procede así:

Paso 0 • Datos. Se representan el foco Φ y el vértice Q en los dos diedros: Φ_T y Q_T en el alzado T, Φ_H y Q_H en las plantas, Φ_Z y Q_Z en el alzado Z.

Paso 1 • Alzado T: hallar X' . Se traza el rayo $\Phi_T Q_T$ y se prolonga hasta la horizontal $T = T_1$. El punto de corte Q'_T da la abscisa X' del punto proyectado. Es el corte de la recta proyectante con el hiperplano de llegada, que en esta vista se ve de canto.

Paso 2 • Planta: hallar y' . Desde Q'_T se baja una línea de referencia vertical. Donde corta a la planta del rayo, $\Phi_H Q_H$, está Q'_H , que da y' . Como las dos plantas son iguales, Q'_H se marca en ambas.

Paso 3 • Alzado Z: hallar z' . La misma línea de referencia continúa hasta el alzado Z, donde corta al rayo $\Phi_Z Q_Z$ en Q'_Z , que da z' .

Comprobación. Q'_T , Q'_H y Q'_Z están sobre la misma vertical, y en cualquiera de las vistas la distancia de Φ a Q' es λ veces la distancia de Φ a Q .

El procedimiento sólo funciona porque **los diedros están alineados uno encima del otro**: la abscisa x' obtenida en el Diedro 2 baja al Diedro 1 sin medir nada. Es exactamente la misma operación que, en el diédrico, permite pasar de la planta al alzado.

Caso particular. Si la planta del rayo es perpendicular a la LT ($x = X_\Phi$), la línea de referencia coincide con el rayo y el paso 2 no da un punto de corte. En ese caso basta llevar sobre la planta del rayo la razón λ leída en el alzado T, o bien hacer un cambio de plano.

En todas las láminas se usa el mismo código de colores: **rojo** para la celda en el hiperplano de llegada, **azul** para la celda que se proyecta, **verde** para su proyección, **morado** para las aristas en dirección T y **naranja** para los rayos que salen del foco. Las líneas discontinuas verticales son líneas de referencia.

7. EJEMPLO COMPLETO: CONSTRUCCIÓN GRÁFICA Y CÁLCULO

7.1. Datos

Se toma un tesseract de arista 5 formado por dos celdas cúbicas idénticas, una en $T = 4$ y otra en $T = 9$. Los cubos están girados en planta: su base es el cuadrado ABCD, cuyos lados miden 5 (por ejemplo, $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$).

Los vértices I, J, ..., P tienen las mismas coordenadas (x, y, z) que A, B, ..., H y sólo se diferencian en T: $\Delta T = 9 - 4 = 5$, igual que la arista. Los segmentos AI, BJ, ..., HP son las 8 aristas en dirección T.

- **Hiperplano de llegada:** $T = 4$. La celda 1 está contenida en él, así que no se mueve ($\lambda = 1$). Sólo hay que proyectar la celda 2.
- **Foco:** $\Phi = (5.5, 7.5, 9.5, 14)$. En (X, Y, Z) coincide con el centro del cubo; en T está por encima de las dos celdas.

La Figura 4 muestra estos datos en el sistema bi-diédrico. Es la primera comprobación de que el sistema aporta información: en la planta y en el alzado Z las dos celdas **coinciden**, y sólo el alzado T las separa.

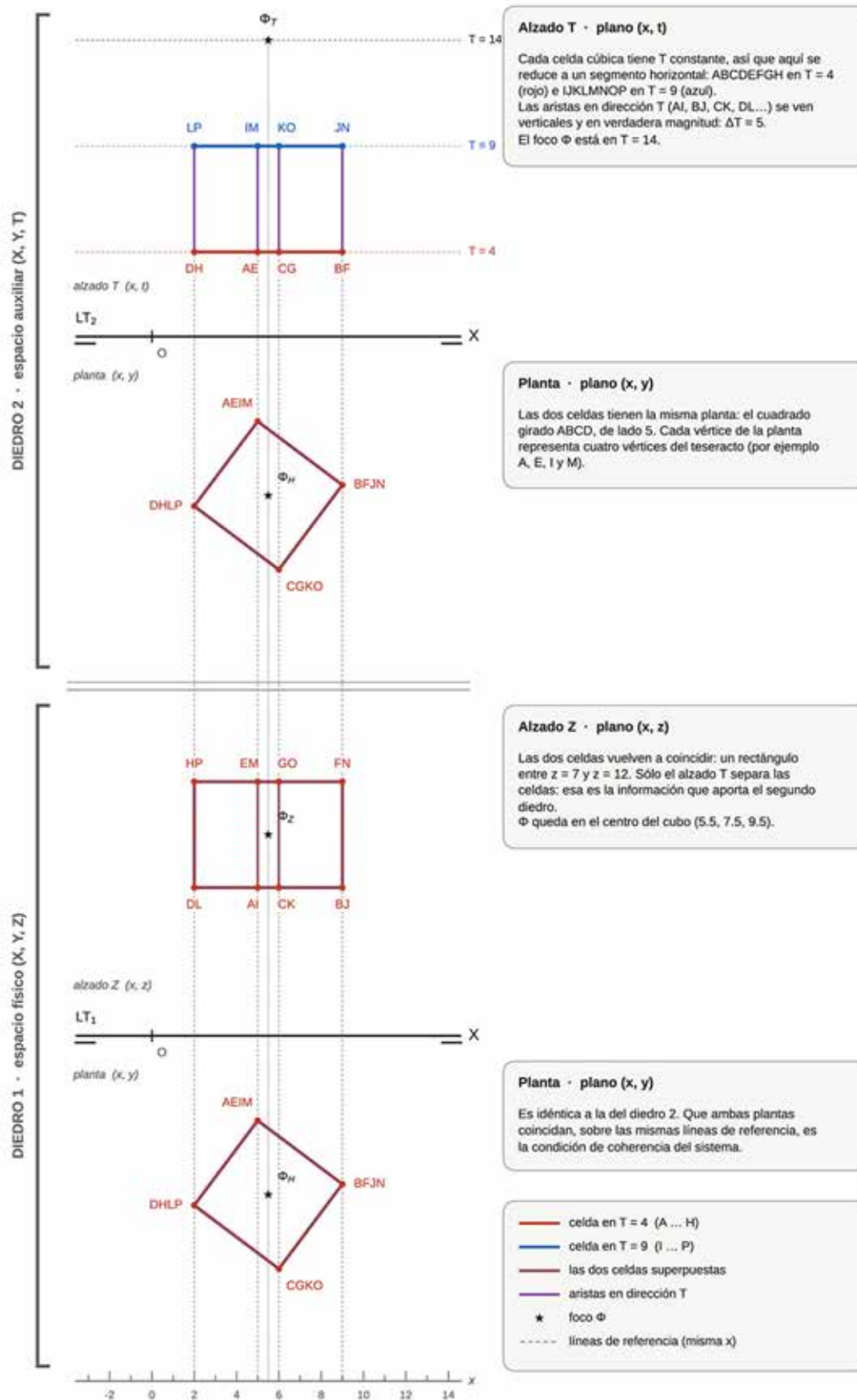


Figura 4. Datos del ejemplo en el sistema bi-diédrico, con el Diedro 2 (X, Y, T) encima del Diedro 1 (X, Y, Z). En el alzado T cada celda se ve como un segmento horizontal ($T = 4$ y $T = 9$) y las aristas en dirección T como segmentos verticales. En planta y en alzado Z las dos celdas se superponen. Las líneas de referencia enlazan las cuatro vistas.

Celda 1 · T = 4 (hiperplano de llegada)				Celda 2 · T = 9 (celda que se proyecta)			
Vértice	X	Y	Z	Vértice	X	Y	Z
A	5	4	7	I	5	4	7
B	9	7	7	J	9	7	7
C	6	11	7	K	6	11	7
D	2	8	7	L	2	8	7
E	5	4	12	M	5	4	12
F	9	7	12	N	9	7	12
G	6	11	12	O	6	11	12
H	2	8	12	P	2	8	12

Tabla 1. Coordenadas de los 16 vértices

7.2. Cálculo numérico

En este punto se calcula dónde cae cada vértice de la celda 2 (la que está en $T = 9$) cuando se proyecta desde el foco $\Phi = (5.5, 7.5, 9.5, 14)$ sobre el hiperplano $T = 4$. La celda 1 no hace falta calcularla: ya está en $T = 4$ y se queda donde está. El cálculo se hace en cinco pasos.

Paso 1. La recta que une el foco con un vértice. Un vértice cualquiera de la celda 2 se escribe $P = (x, y, z, 9)$. La recta que va del foco a ese vértice es $r(\lambda) = \Phi + \lambda (P - \Phi)$, y coordenada a coordenada queda:

$$X(\lambda) = 5.5 + \lambda(x - 5.5)$$

$$Y(\lambda) = 7.5 + \lambda(y - 7.5)$$

$$Z(\lambda) = 9.5 + \lambda(z - 9.5)$$

$$T(\lambda) = 14 + \lambda(9 - 14) = 14 - 5\lambda$$

El número λ indica en qué punto de la recta estamos: con $\lambda = 0$ estamos en el foco y con $\lambda = 1$ estamos en el vértice.

Paso 2. Dónde corta la recta al hiperplano $T = 4$. Buscamos el valor de λ para el que la cuarta coordenada vale 4:

$$14 - 5\lambda = 4$$

$$5\lambda = 10$$

$$\lambda = 2$$

Es el mismo resultado que da la fórmula general de la proyección:

$$\lambda = \frac{T_1 - T_\Phi}{T_2 - T_\Phi} = \frac{4 - 14}{9 - 14} = 2$$

¿Qué significa $\lambda = 2$? Que la imagen está al doble de distancia del foco que el vértice. Se ve fácilmente en la coordenada T : del foco ($T = 14$) a la celda ($T = 9$) hay 5 unidades, y del foco al hiperplano ($T = 4$) hay 10, el doble. Por eso la celda 2 se verá **ampliada al doble**.

Paso 3. Las fórmulas de proyección. Se sustituye $\lambda = 2$ en las tres primeras coordenadas y se simplifica:

$$X' = 5.5 + 2(x - 5.5) = 2x - 5.5$$

$$Y' = 7.5 + 2(y - 7.5) = 2y - 7.5$$

$$Z' = 9.5 + 2(z - 9.5) = 2z - 9.5$$

La regla es muy sencilla: **cada coordenada de la imagen es el doble de la del vértice menos la del foco**. La cuarta coordenada de todas las imágenes es $T = 4$.

Paso 4. Un ejemplo: el vértice I. El vértice $I = (5, 4, 7, 9)$ se proyecta así:

$$\begin{aligned} X' &= 2 \cdot 5 - 5.5 = 4.5 \\ Y' &= 2 \cdot 4 - 7.5 = 0.5 \\ Z' &= 2 \cdot 7 - 9.5 = 4.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I'J' &= \sqrt{(12.5 - 4.5)^2 + (6.5 - 0.5)^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} = 10 \\ I'M' &= 14.5 - 4.5 = 10 \end{aligned}$$

Su imagen es, por tanto, $I' = (4.5, 0.5, 4.5)$ en el hiperplano $T = 4$.

Paso 5. Los ocho vértices. Haciendo lo mismo con todos los vértices de la celda 2 se obtiene la Tabla 2.

Comprobación. Si el cálculo es correcto, la celda proyectada tiene que ser un cubo de arista 10 (el doble de 5). Basta medir dos aristas:

Además, el centro del cubo proyectado es $(5.5, 7.5, 9.5)$, el mismo punto que el foco en (X, Y, Z) y que el centro de la celda 1. Es decir: **la celda 1 queda dentro, en verdadera magnitud, y la celda 2 la rodea con el doble de tamaño**, que es la imagen clásica del tesseracto.

Como resumen se obtiene la Tabla 2.

Vértice (x, y, z)	$X' = 2x - 5.5$	$Y' = 2y - 7.5$	$Z' = 2z - 9.5$	Imagen
I (5, 4, 7)	$2 \cdot 5 - 5.5 = \mathbf{4.5}$	$2 \cdot 4 - 7.5 = \mathbf{0.5}$	$2 \cdot 7 - 9.5 = \mathbf{4.5}$	$I' (4.5, 0.5, 4.5)$
J (9, 7, 7)	$2 \cdot 9 - 5.5 = \mathbf{12.5}$	$2 \cdot 7 - 7.5 = \mathbf{6.5}$	$2 \cdot 7 - 9.5 = \mathbf{4.5}$	$J' (12.5, 6.5, 4.5)$
K (6, 11, 7)	$2 \cdot 6 - 5.5 = \mathbf{6.5}$	$2 \cdot 11 - 7.5 = \mathbf{14.5}$	$2 \cdot 7 - 9.5 = \mathbf{4.5}$	$K' (6.5, 14.5, 4.5)$
L (2, 8, 7)	$2 \cdot 2 - 5.5 = \mathbf{-1.5}$	$2 \cdot 8 - 7.5 = \mathbf{8.5}$	$2 \cdot 7 - 9.5 = \mathbf{4.5}$	$L' (-1.5, 8.5, 4.5)$
M (5, 4, 12)	$2 \cdot 5 - 5.5 = \mathbf{4.5}$	$2 \cdot 4 - 7.5 = \mathbf{0.5}$	$2 \cdot 12 - 9.5 = \mathbf{14.5}$	$M' (4.5, 0.5, 14.5)$
N (9, 7, 12)	$2 \cdot 9 - 5.5 = \mathbf{12.5}$	$2 \cdot 7 - 7.5 = \mathbf{6.5}$	$2 \cdot 12 - 9.5 = \mathbf{14.5}$	$N' (12.5, 6.5, 14.5)$
O (6, 11, 12)	$2 \cdot 6 - 5.5 = \mathbf{6.5}$	$2 \cdot 11 - 7.5 = \mathbf{14.5}$	$2 \cdot 12 - 9.5 = \mathbf{14.5}$	$O' (6.5, 14.5, 14.5)$
P (2, 8, 12)	$2 \cdot 2 - 5.5 = \mathbf{-1.5}$	$2 \cdot 8 - 7.5 = \mathbf{8.5}$	$2 \cdot 12 - 9.5 = \mathbf{14.5}$	$P' (-1.5, 8.5, 14.5)$

Tabla 2. Proyección de la celda 2 sobre $T = 4$ ($\lambda = 2$)

Vértice (T = 9)				Proyectado (T = 4)			
Vértice	x	y	z	Vértice	X'	Y'	Z'
I	5	4	7	I'	4.5	0.5	4.5
J	9	7	7	J'	12.5	6.5	4.5
K	6	11	7	K'	6.5	14.5	4.5
L	2	8	7	L'	-1.5	8.5	4.5
M	5	4	12	M'	4.5	0.5	14.5
N	9	7	12	N'	12.5	6.5	14.5
O	6	11	12	O'	6.5	14.5	14.5
P	2	8	12	P'	-1.5	8.5	14.5

Tabla 2. Vértices de la celda 2 y sus proyecciones sobre T = 4

7.3. Construcción gráfica

La Figura 5 aplica los tres pasos del apartado 6 a un solo vértice, J = (9, 7, 7, 9). El rayo $\Phi_T J_T$ corta a T = 4 en X' = 12.5 (paso 1); la línea de referencia de X' corta a la planta del rayo en y' = 6.5 (paso 2) y a su alzado Z en z' = 4.5 (paso 3). Resulta J' = (12.5, 6.5, 4.5), el mismo valor que da el cálculo.

Obsérvese que J y N tienen la misma planta y el mismo alzado T (sólo difieren en Z), de modo que los pasos 1 y 2 sirven para los dos y sólo el paso 3 es distinto. Lo mismo ocurre con las parejas I-M, K-O y L-P. Por eso, en el alzado T bastan cuatro rayos para proyectar los ocho vértices.

Repitiendo la construcción para los ocho vértices se obtiene la lámina completa (Figura 6). En ella, el cubo proyectado aparece en planta como el cuadrado verde I'J'K'L', homotético del ABCD con centro Φ_H y razón 2, y en alzado Z como el rectángulo verde comprendido entre z' = 4.5 y z' = 14.5.

Resultado en el espacio físico: La Figura 7 muestra el resultado en perspectiva. En el espacio auxiliar (X, Y, T) se ve el haz de rayos que sale de Φ , atraviesa la celda en T

= 9 y llega al hiperplano T = 4. En el espacio físico (X, Y, Z) aparece la imagen del tesseracto:

- **Cubo rojo ABCDEFGH:** la celda en T = 4, en verdadera magnitud (arista 5).
- **Cubo verde I'J'K'L'M'N'O'P':** la celda en T = 9, ampliada al doble porque está más cerca del foco (arista 10).
- **Ocho segmentos morados:** las aristas en dirección T.
- **Las otras seis celdas** del tesseracto (por ejemplo, la que forman las caras ABFE e IJNM) se ven como troncos de pirámide entre una cara del cubo rojo y la cara correspondiente del cubo verde.

El recuento confirma que no falta nada: 16 vértices, 32 aristas (12 rojas, 12 verdes y 8 moradas), 24 caras (6 + 6 + 12 trapecios) y 8 celdas (2 cubos y 6 troncos de pirámide), exactamente los elementos del tesseracto.

Comprobación: La construcción gráfica y el cálculo coinciden en los ocho vértices. Además se cumplen todas las propiedades que predice la teoría:

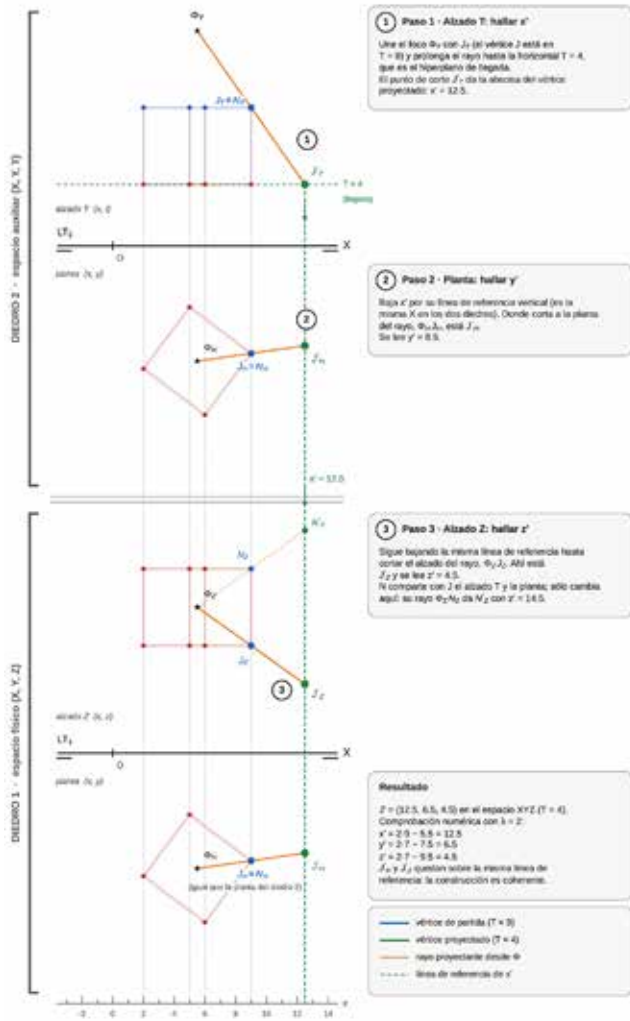


Figura 5. Construcción de un vértice paso a paso ($J \rightarrow J'$). 1) En el alzado T , el rayo desde ΦT da la abscisa x' sobre $T = 4$. 2) Bajando por la línea de referencia, la planta del rayo da y' . 3) Siguiendo la misma línea, el alzado Z del rayo da z' . El vértice N , con la misma planta y el mismo alzado T que J , sólo cambia en el paso 3.

- El cubo proyectado tiene arista $10 = \lambda \cdot 5$; por ejemplo, $I'J' = \sqrt{(8^2 + 6^2)} = 10$.
- Su centro es $(5.5, 7.5, 9.5)$, el mismo que el del cubo original y que la posición del foco en (X, Y, Z) : la homotecia tiene su centro en Φ .
- Cada arista en dirección T , por ejemplo AI , se proyecta en el segmento AI' , que está sobre el rayo que sale de Φ . Por eso las 8 aristas en dirección T aparecen como segmentos radiales.
- Se conservan las incidencias: cada vértice proyectado sigue unido a los mismos vecinos que en 4D.
- En la lámina, las proyecciones de cada vértice están sobre una misma línea de referencia y las dos plantas son idénticas: se cumplen las condiciones de coherencia del apartado 3.3.

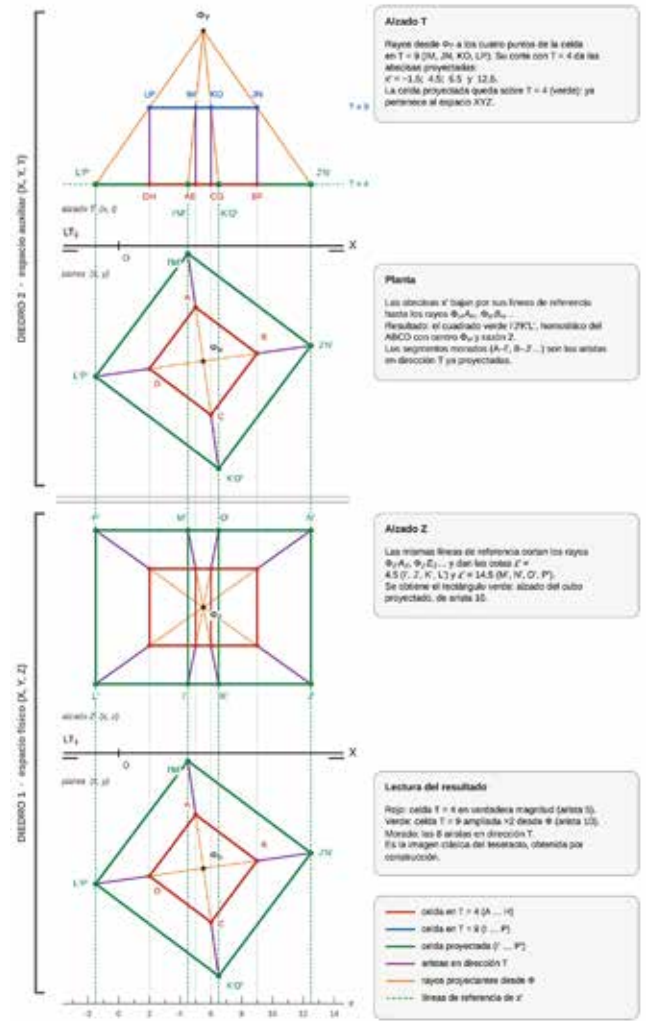


Figura 6. Lámina completa de la proyección del tesseracto en el sistema bi-diédrico. Rojo: celda en $T = 4$, que no se mueve. Verde: celda en $T = 9$ proyectada desde Φ sobre $T = 4$. Morado: aristas en dirección T ya proyectadas. Las líneas de referencia verdes llevan cada abscisa x' del alzado T a la planta y al alzado Z .

8.COMPROBACIÓN

La construcción gráfica y el cálculo coinciden en los ocho vértices. Además se cumplen todas las propiedades que predice la teoría:

- El cubo proyectado tiene arista $10 = \lambda \cdot 5$; por ejemplo, $I'J' = \sqrt{(8^2 + 6^2)} = 10$.
- Su centro es $(5.5, 7.5, 9.5)$, el mismo que el del cubo original y que la posición del foco en (X, Y, Z) : la homotecia tiene su centro en Φ .
- Cada arista en dirección T , por ejemplo AI , se proyecta en el segmento AI' , que está sobre el rayo que sale de Φ . Por eso las 8 aristas en dirección T aparecen como segmentos radiales.
- Se conservan las incidencias: cada vértice proyectado sigue unido a los mismos vecinos que en 4D.

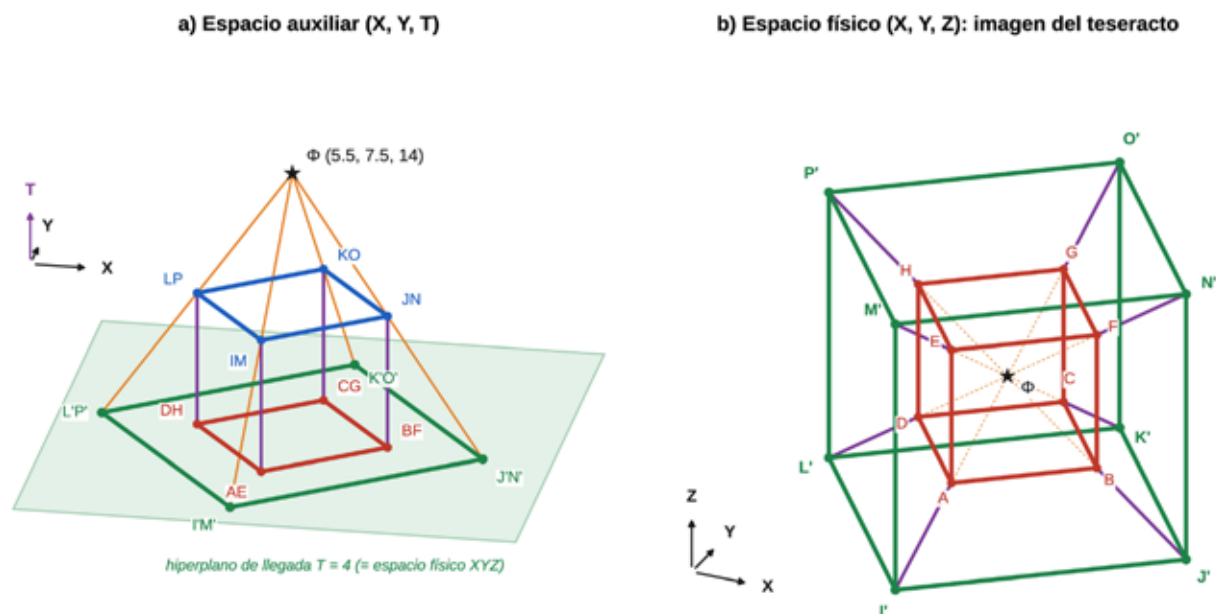


Figura 7. Resultado en perspectiva. a) Espacio auxiliar (X, Y, T): rayos desde Φ que atraviesan la celda en $T = 9$ y cortan al hiperplano de llegada $T = 4$. b) Espacio físico (X, Y, Z): imagen del tesseracto, con la celda en $T = 4$ (rojo), la celda en $T = 9$ proyectada (verde) y las aristas en dirección T (morado).

- En la lámina, las proyecciones de cada vértice están sobre una misma línea de referencia y las dos plantas son idénticas: se cumplen las condiciones de coherencia del apartado 3.3.

9. CONCLUSIÓN

El sistema bi-diédrico extiende el diédrico a cuatro dimensiones sin cambiar sus reglas: dos diedros, (X, Y, Z) y (X, Y, T), dibujados uno encima del otro y enlazados por el eje X.

La alineación vertical de los diedros es la clave operativa: permite llevar abscisas de un espacio a otro con simples líneas de referencia y comprobar la coherencia de cada punto.

La proyección central $4D \rightarrow 3D$ queda definida por un foco y un hiperplano de llegada. Para celdas con T constante es una homotecia de razón $\lambda = (T_1 - T_\phi) / (T_2 - T_\phi)$, que explica el tamaño relativo de los cubos en la imagen del tesseracto.

En el ejemplo, la construcción gráfica y el cálculo coinciden en todos los vértices, y la imagen clásica del tesseracto aparece como consecuencia de una construcción definida, no como un dibujo interpretativo. El mismo marco puede aplicarse a otros problemas 4D, como secciones por hiperplanos, intersecciones, paralelismos y verdaderas magnitudes, que quedan como líneas de trabajo futuras.

10. AGRADECIMIENTOS

Al profesor Enrique Rey Rey, del IES de Cee, por despertar en mí la pasión por la geometría descriptiva.

11. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Izquierdo Asensi, F. (1980). *Geometría descriptiva*.

Sobre los autores

José Ignacio Rivas Negrera

Profesional con amplia experiencia en el Desarrollo de Negocio en España y América de Sur (Uruguay, Ecuador, Bolivia, Paraguay, Perú, Brasil) durante los últimos 20 años. Gran conocimiento de obras civiles e infraestructuras con aporte de soluciones constructivas y de diseño. Miembro del comité de gerencia de varios consorcios de obras de infraestructuras. Miembro de la Mesa de Organización de la Feria EXPO ECOMIN. Socio de MENSA PERÚ. Profesor de Topografía y Geodesia en Ingeniería Ambiental y Arquitectura en la Universidad Privada del Norte.